TEMA II.- SEÑALES PERIODICAS

II.1.- REPRESENTACION DE SEÑALES PERIODICAS

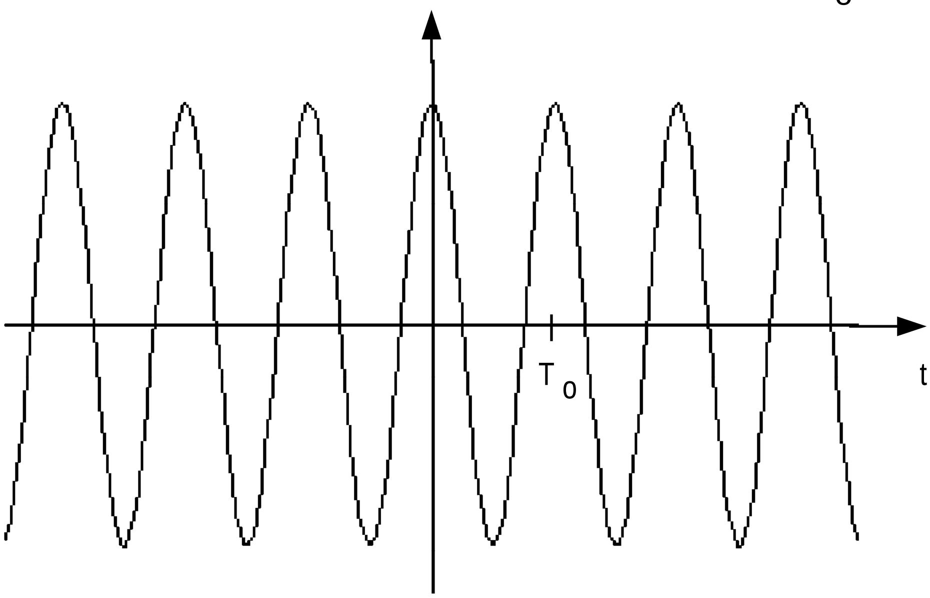
Una señal es periódica si

$$x(t) = x(t + T_o) \qquad \forall\, t$$

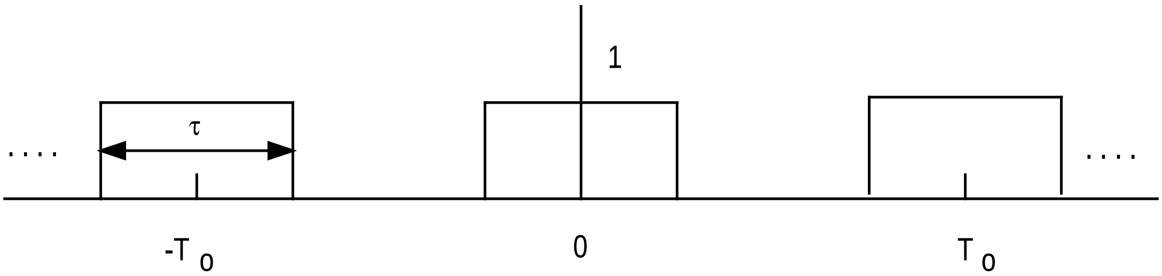
siendo T_o una cantidad positiva, denominada periodo.

EJEMPLOS

$$x(t) = \cos\omega_o t \qquad \omega_o = \frac{2\pi}{T_o}$$

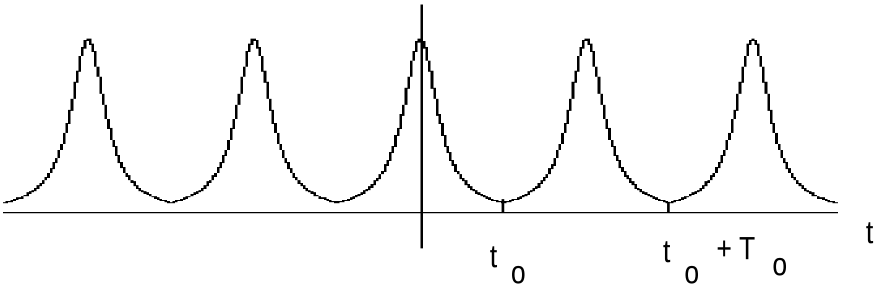


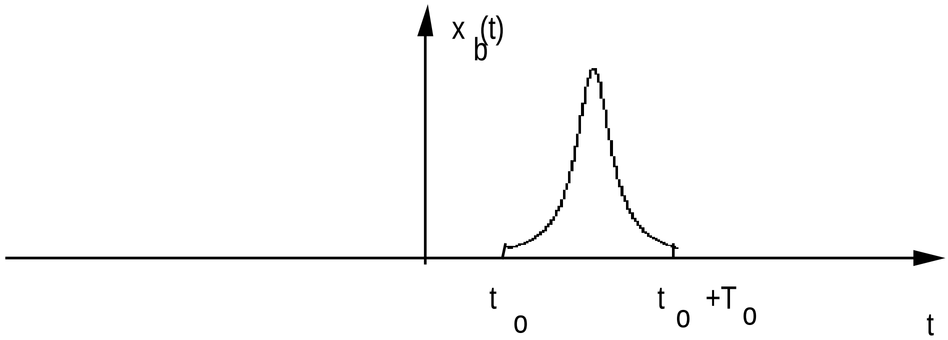
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \prod\left(\frac{t-nT_o}{\tau}\right)$$



En general

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_b\,(t - nT_o)$$





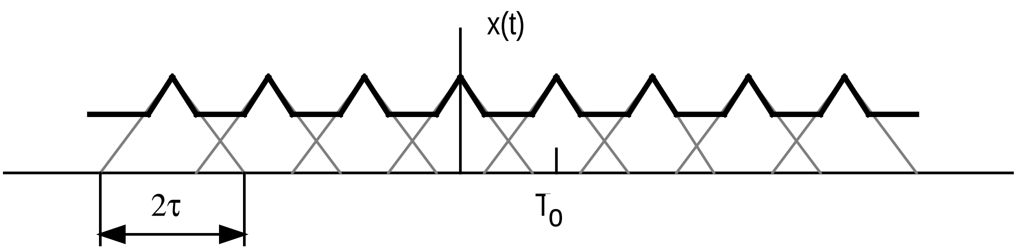
La representación

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_b\,(t - nT_o)$$

sigue siendo válida aunque la duración de la denominada señal básica $x_b(t)$ sea superior al periodo T_o .

EJEMPLO :

$$x_b(t) = \Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right) \qquad\qquad 2\tau > T_o$$



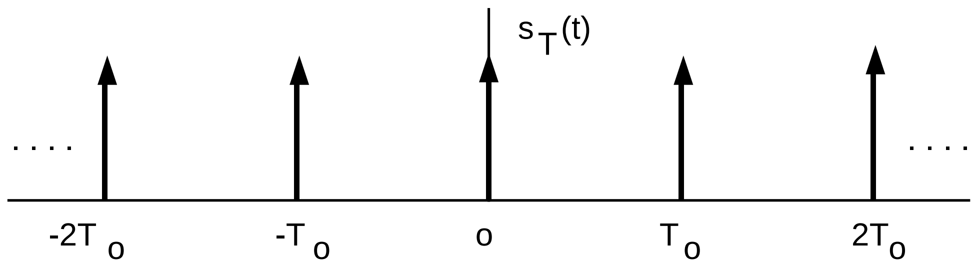
En este caso, la envolvente final de la señal periódica x(t) no coincide con la extensión periódica de la señal básica $x_b(t)$.

II.2.- TRANSFORMADA DE FOURIER DE UNA SEÑAL PERIODICA

La señal periódica x(t) puede escribirse como

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_b(t - nT_o) = x_b(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_o)$$

La convolución de la señal básica con un tren de impulsos periódico $s_T(t)$.



$$S_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_o)$$

La transformada de Fourier será

$$X(\omega) = X_b(\omega)\ S_T(\omega)$$

con

$$S_T(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn\omega T_o}$$

Para encontrar otra representación de esta última transformada, consideremos el tren finito de impulsos, con transformada de Fourier.

$$S_{TN}(\omega) = \sum_{n=-N}^{N} e^{-jn\omega T_o}$$

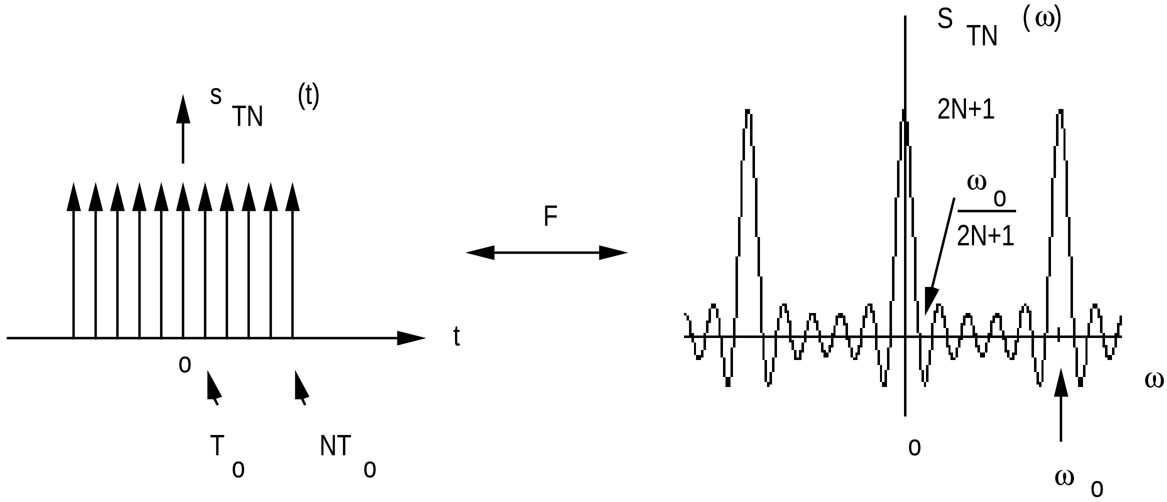
De esta forma

$$S_T(\omega) = \lim_{N\to\infty} S_{TN}(\omega)$$

Utilizando las propiedades de las series geométricas puede escribirse que

$$S_{TN}(\omega) = \frac{\mathrm{sen}(N+1/2)\omega T_o}{\mathrm{sen}\omega T_o/2}$$

Esta función es periódica de periodo $\omega_o = \frac{2\pi}{T_o}$ y tiene la forma



Obsérvese que a medida que N→∞, la amplitud de los lóbulos principales tiende también a infinito y la anchura de los mismos tiende a cero.

Analíticamente, puede escribirse que

$$S_{TN}(\omega) = \frac{\mathrm{sen}(N+1/2)\omega T_o}{\omega - m\frac{2\pi}{T_o}} \qquad \frac{\omega - m\frac{2\pi}{T_o}}{\mathrm{sen}\omega\frac{T_o}{2}}$$

Siendo m un número entero cualquiera. El segundo factor del producto es una función acotada de ω en el intervalo.

$$(m\text{-}1/2)\,\frac{2\pi}{T_o} \;<\; \omega \;<\; (m+1/2)\,\frac{2\pi}{T_o}$$

y vale $\frac{2}{T_o}$ en $\omega = m\,\frac{2\pi}{T_o}$

por lo tanto en ese intervalo

$$S_T(\omega) = \lim_{N\to\infty} S_{TN}(\omega) = \frac{\omega - m\,\frac{2\pi}{T_o}}{\operatorname{sen}\omega\,\frac{T_o}{2}}\;Q(\omega)$$

donde

$$Q(\omega) = \lim_{N\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(N+1/2)\omega T_o}{\omega\text{-}m\,\frac{2\pi}{T_o}}$$

Por ser el numerador periódico con periodo $\omega_o = \frac{2\pi}{T_o}$ puede escribirse que

$$Q(\omega) = \lim_{N\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(N+1/2)(\omega\text{-}m\frac{2\pi}{T_o})\,T_o}{\omega\text{-}m\,\frac{2\pi}{T_o}} = \pi\delta\,(\omega\text{-}m\frac{2\pi}{T_o}\,)$$

ya que

$$\lim_{a\to\infty} \frac{\operatorname{sen}a(t-\tau)}{\pi(t-\tau)} = \delta(t-\tau)$$

II.2.1.- TRANSFORMADA DEL TREN DE IMPULSOS

$$S_T(\omega) = \omega_o\;\delta(\omega - m\omega_o) \qquad\qquad (m\text{-}1/2)\omega_o < \omega < (m+1/2)\omega_o$$

con $\omega_o = 2\pi/T_o$. Variando m de -∞ a ∞ luego la transformada de un tren de impulsos es otro tren de impulsos.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_o) \quad \overset{\mathbb{F}}{\leftrightarrow} \quad \sum_{m=-\infty}^{\infty} \omega_o\, \delta(\omega - m\omega_o)$$

II.2.2.- TRANSFORMADA DE LA SEÑAL PERIODICA

$$X(\omega) = X_b(\omega)\; S_T(\omega) \;= X_b(\omega) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \omega_o\, \delta(\omega - m\omega_o)$$

que puede escribirse finalmente

$$X(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \omega_o\, X_b(m\omega_o)\, \delta(\omega - m\omega_o) \qquad \omega_o = 2\pi/T_o$$

o bien

$$X(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{X_b(m\omega_o)}{T_o}\; 2\pi\, \delta(\omega - m\omega_o)$$

La transformada de Fourier de una señal periódica es un tren de impulsos separados ω_o y con amplitudes $\omega_o\, X_b(m\omega_o)$, es decir, la transformada de la función básica particularizada en $m\omega_o$.

II.3.- SERIES DE FOURIER

Tomando transformadas inversas en la última expresión y teniendo en cuenta que

$$2\pi\delta(\omega - m\omega_o) \quad \overset{\mathbb{F}^{-1}}{\leftrightarrow} \quad e^{jm\omega_o t}$$

se obtiene

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m\; e^{jm\omega_o t}$$

con

$$c_m = \frac{X_b(m\omega_o)}{T_o} = \frac{1}{T_o} \int_{-\infty}^{\infty} x_b(t)\, e^{-jm\omega_o t}\, dt$$

Si $x_b(t)$ es la propia señal periódica x(t) truncada a un periodo

$$c_m = \frac{1}{T_o} \int_{T_o} x_b(t)\, e^{-jm\omega_o t}\, dt$$

Estas son las series de Fourier.

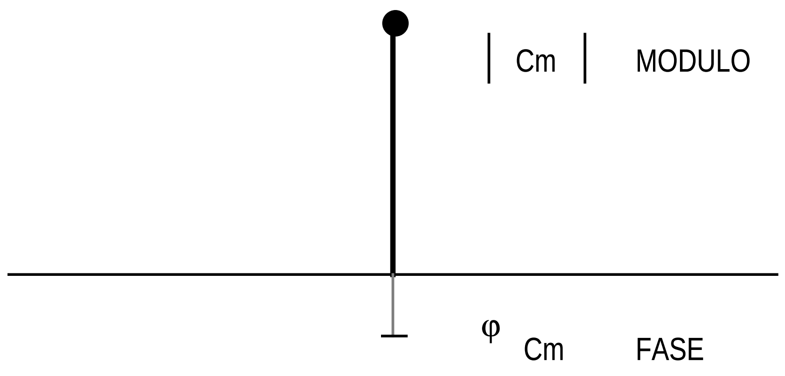
II.3.1.- REPRESENTACION GRAFICA DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE UNA SEÑAL PERIODICA

La representación de la transformada de Fourier periódica es incómoda debido a las funciones delta. Lo que suele representarse son los valores de los coeficientes de la serie de Fourier.

Si las amplitudes de cada línea son complejas

$$c_m = \frac{X_b(m\omega_o)}{T_o}$$

Puede representarse como



II.3.2.- FORMULA DE POISSON

Puesto que una función periódica admite las representaciones :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_b(t - nT_o) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{X_b(m\omega_o)}{T_o} e^{jm\omega_o t}$$

Haciendo t=0 se obtiene la fórmula de Poisson :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_b(nT_o) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{X_b(m\omega_o)}{T_o}$$

Fórmula que es válida para cualquier $x_b(t)$ y que puede tener interesantes aplicaciones.

EJEMPLOS DE APLICACION

a) Sea $x_b(t) = e^{-\alpha|t|}$

$\alpha > 0$

$$X_b(\omega) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2+(m\omega_o)^2} \frac{1}{T_o} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|nT_o|} \quad ; \quad \forall T_o$$

En particular si $T_o = 2$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\alpha|n|} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\alpha n} = 1 + 2 \frac{e^{-2\alpha}}{1-e^{-2\alpha}}$$

$$= \frac{1+e^{-2\alpha}}{1-e^{-2\alpha}} = \frac{1}{\mathrm{tgh}\alpha}$$

Conclusión :

Se obtiene la suma de la serie :

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + m^2\pi^2} = \frac{1}{\text{tgh}\alpha} \qquad \alpha > 0$$

b) Demostrar que :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}\,a(t-nT_o)}{t-nT_o} = \omega_c \frac{\text{sen}(2N+1)\omega_c t}{\text{sen}\omega_c t}$$

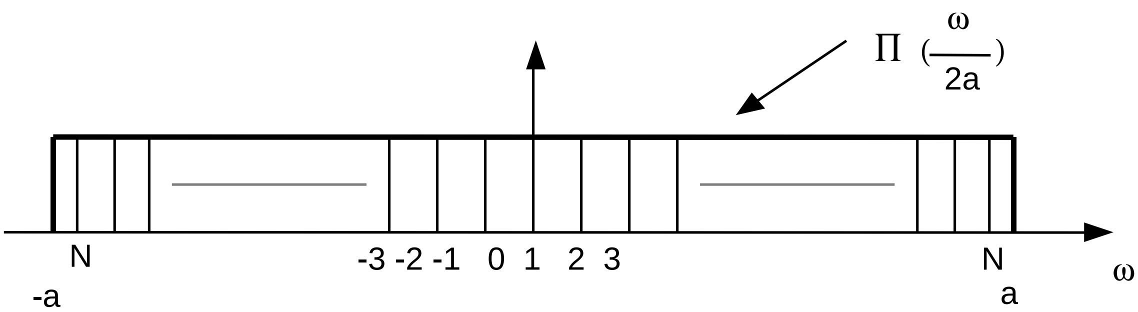
con $\omega_c = \pi/T_o$ y N tal que $N < \frac{aT_o}{2\pi} < N+1$

Tomando como función básica

$$x_b(t) = \frac{\text{sen}\,at}{t} \overset{\mathbb{F}}{\leftrightarrow} \pi\Pi\left(\frac{\omega}{2a}\right)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}\,a(t-nT_o)}{t-nT_o} = \frac{\pi}{T_o} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{m\omega_o}{2a}\right) e^{-jm2\pi t/T_o}$$

El sumatorio del segundo miembro contiene un número finito de términos que depende del parámetro a



N es el m-máximo que verifica

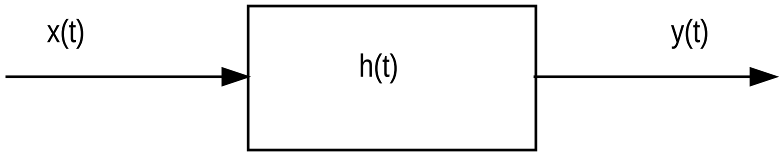
$$N.\omega_o = N\frac{2\pi}{T_o} < a$$

$$(N + 1)\ \frac{2\pi}{T_o}\ >\ a$$

De esta forma el segundo miembro pasa a ser

$$\frac{\pi}{T_o} \sum_{m=-N}^{N} e^{-j2m \frac{\pi}{T_o} t} = \omega_c \frac{\operatorname{sen}(2N+1)\, \omega_c t}{\operatorname{sen}\omega_c t}$$

II.4.- SEÑALES PERIODICAS A TRAVES DE SISTEMAS LINEALES



$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = H(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{X_b(n\omega_o)}{T_o}\ 2\pi\ \delta(\omega-n\omega_o)$$

$$Y(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{Y_b\ (n\omega_o)}{T_o}\ 2\pi\ \delta(\omega-n\omega_o)$$

$$Y_b(n\omega_o) = H(n\omega_o)\ X_b\ (n\omega_o)$$

La salida también es periódica con el mismo periodo T_o que la de entrada.

Respuesta en el dominio del tiempo.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\ h(t-\tau)d\tau$$

$$x(\tau) = \sum_{-\infty}^{\infty} x_b\ (\tau-nT_o)$$

La salida será :

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_b(\tau - nT_o)\ h(t-\tau)\, d\tau \quad \begin{cases} \tau - nT_o = u \\ d\tau = du \end{cases}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_b(u)\ \ h(t-nT_o - u)du$$

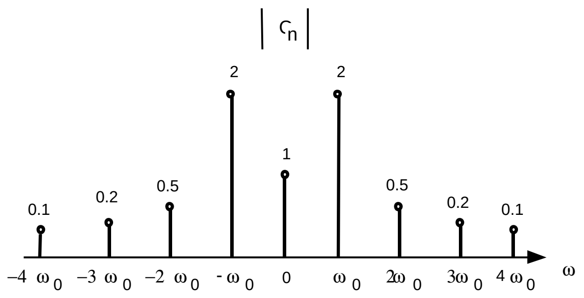
Conclusión :

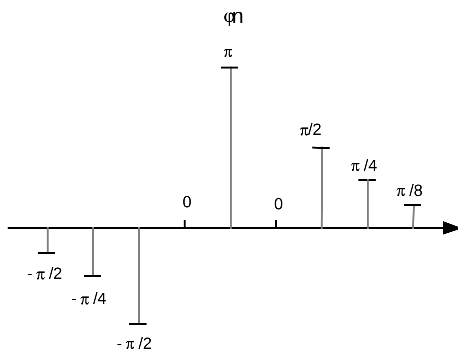
$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_b(t-nT_o)$$

$$y_b(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_b(\tau)\ h(t-\tau)dt = x_b(t) * h(t)$$

EJEMPLOS

1) Sea x(t) dada por





Periodo T_o = 10mseg

Calcular la salida de un paso bajo de 250Hz. Las frecuencias de las rayas espectrales son nf_o , con $f_o = \frac{1}{T_o}$ = 100Hz.

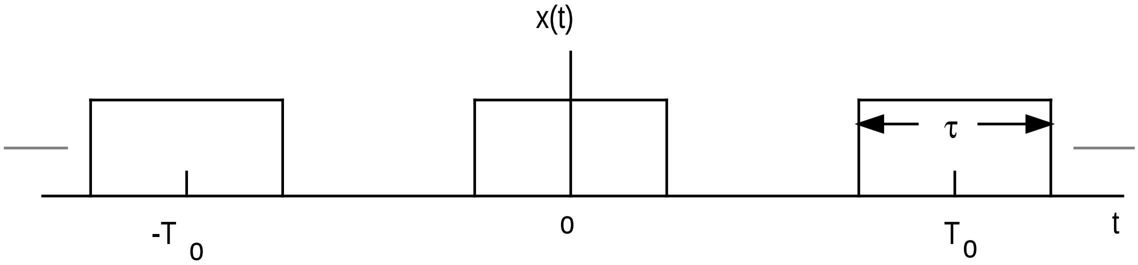
Solo las rayas n = 0, ±1, ±2 aparecerán a la salida

$$y(t) = -1 + 2e^{j\omega_o t} + 0.5e^{j\pi/2}\ \ e^{j2\omega_o t}$$

$$+ 2e^{-j\omega_o t} + 0.5e^{-j\pi/2} \; e^{-j2\omega_o t}$$

$$y(t) = -1 + 2\cos\omega_o t - \mathrm{sen}2\omega_o t$$

2)



$$h(t) = e^{-\alpha t} \; u(t) \qquad \text{Filtro RC paso bajo}$$

ANALISIS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

$$Y(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{Y_b(n\omega_o)}{T_o} \qquad 2\pi \, \delta(\omega-n\omega_o \,))$$

donde

$$Y_b \,(n\omega_o) \;\; = H(n\omega_o \,) \, X_b(n\omega_o) \,)$$

Tomando como función base para x(t)

$$x_b(t) \; = \prod\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

su transformada es

$$X_b(\omega) \; = \frac{2\mathrm{sen}\omega\tau/2}{\omega}$$

La transformada de la respuesta impulsional

$$H(\omega) = \frac{1}{\alpha+j\omega}$$

Luego :

$$Y_b\ (n\omega_o) = \frac{2\text{sen}\ n\omega_o\ \tau/2}{n\omega_o}\ \frac{1}{\alpha+jn\omega_o}$$

La transformada de la salida será

$$Y(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\text{sen}\ n\omega_o\ \tau/2}{nT_o\omega_o}\ \frac{1}{\alpha+jn\omega_o}\ 2\pi\delta(\omega-n\omega_o)$$

En el dominio temporal

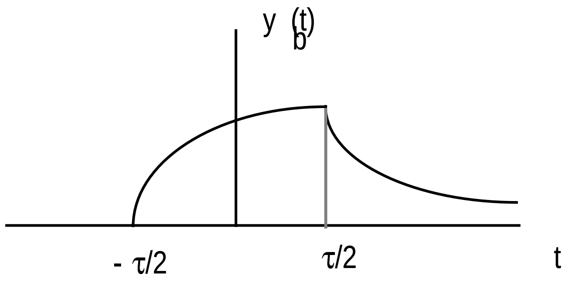
$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\text{senn}\omega_o\tau/2}{nT_o\omega_o}\ \frac{1}{\alpha+jn\omega_o}\ e^{jn\omega_o t}$$

$$= \frac{\tau}{\alpha T_o} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\text{senn}\omega_o\tau/2}{nT_o\omega_o}\ \text{Re}\left[\frac{e^{jn\omega_o t}}{\alpha+jn\omega_o}\right]$$

$$= \frac{\tau}{\alpha T_o} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{senn}\pi\tau/T_o}{n\left[\alpha^2+\left(n\frac{2\pi}{T_o}\right)^2\right]}\left[\alpha\cos\frac{2n\pi t}{T_o} + \frac{2n\pi}{T_o}\text{sen}\frac{2n\pi t}{T_o}\right]$$

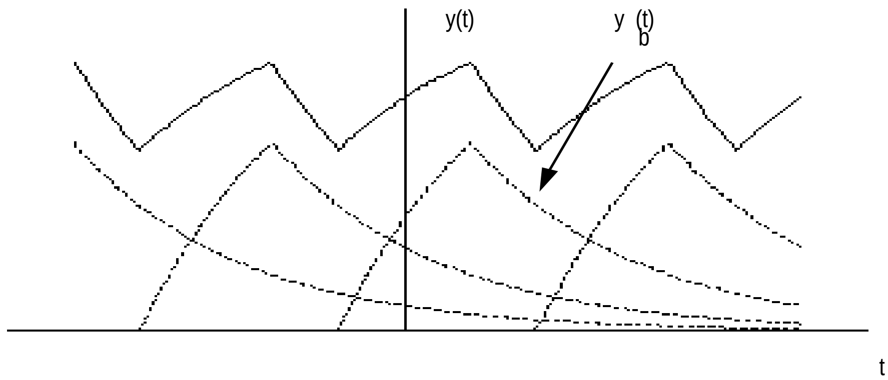
ANALISIS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

$$y_b(t) = x_b(t) * h(t)$$



$$y_b(t) = \begin{cases} 0 & t < -\tau/2 \\ \dfrac{1}{\alpha}\left[1 - e^{-\alpha(t+\tau/2)}\right] & -\tau/2 < t < \tau/2 \\ \dfrac{2}{\alpha}\,\text{senh}\;\alpha\tau/2\; e^{-\alpha t} & t > \tau/2 \end{cases}$$

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_b\,(t-nT_o)$$



Calculando los coeficientes del desarrollo en serie como

$$c_n = \frac{1}{T_o} \int_{-\infty}^{\infty} y_b(t)\; e^{-jn\omega_o t}\; dt$$

Se llega al mismo resultado anterior

Obsérvese que la función básica de salida tiene extensión infinita y por tanto se produce solapamiento. Sumando las contribuciones de las infinitas funciones en el intervalo correspondiente a un periodo se llega a la siguiente expresión, correspondiente a una nueva función básica de duración finita igual al periodo:

$$y'_b\,(t) = \frac{1}{\alpha}\;\left[\,1 - \frac{\text{senh}\;\alpha(T_o-\tau)/2}{\text{senh}\;\alpha T_o/2}\;\; e^{-\alpha t}\,\right] \qquad -\tau/2<t<\tau/2$$

$$y'_b(t) = \frac{1}{\alpha}\,\frac{\operatorname{senh} \alpha\tau/2}{\operatorname{senh} \alpha T_o/2}\; e^{-\alpha(t-T_o/2)} \qquad \tau/2<t<T_o-\tau/2$$

II.5.- REPRESENTACION DE SEÑALES NO PERIODICAS MEDIANTE DESARROLLO EN SERIE DE FOURIER

Cualquier señal no periódica puede desarrollarse en serie de Fourier en un intervalo (a,b) definiendo

$$T_o = b - a$$

$$x_b(t) = \begin{cases} x(t) & a < t < b \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

y realizando su extensión periódica

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_b(t-nT_o)$$

El desarrollo en serie de Fourier de $x_p(t)$ coincidirá con x(t) en el intervalo (a,b).

Si el número de términos empleado en la representación de x(t) es finito (2N+1) se obtendrá una aproximación.

$$\tilde{x}_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n\; e^{jn\omega_o t} \qquad a < t < b$$

$$\omega_o = \frac{2\pi}{T_o} \qquad\qquad c_n = \frac{1}{T_o}\int_a^b x(t)\, e^{-jm\omega_o t}$$

El error de aproximación será

$$e_N(t) = x(t) - \hat{x}_N(t)$$

El error cuadrático total sobre todo el intervalo será

$$E_N = \int_a^b |e_N(t)|^2 dt = \int_a^b e_N(t)\, e_N{*}(t)\, dt$$

$$E_N = \int_a^b e(t)\left[x^*(t) - \sum_{n=-N}^{N} c_n^*\, e^{-jn\omega_o t}\right] dt$$

Es fácil verificar que

$$\int_a^b e(t)\, e^{-jn\omega_o t}\, dt = 0$$

Luego

$$E_N = \int_a^b e(t)\, x^*(t) dt = \int_a^b |x(t)|^2 dt - T_o \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2$$

II.6.- SEÑALES PERIODICAS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

Si una señal tiene una transformada periódica

$$X(\omega + \Omega_o) = X(\omega) \qquad \forall\, \omega$$

Esta última podrá escribirse, igual que en el dominio temporal, como

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_b(\omega + n\Omega_o) = X_b(\omega) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega + n\Omega_o)$$

Donde se ha elegido el signo positivo por razones que se verán más adelante. Obsérvese que el uso de un signo u otro es indiferente.

Aplicando el teorema de dualidad a la transformada obtenida en señales peródicas en el dominio del tiempo

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_o) \quad \overset{\mathbb{F}}{\leftrightarrow} \quad \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_o}\, 2\pi\, \delta(\omega - m\omega_o)$$

Se obtiene que :

$$T/2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t-mT) \quad \overset{\mathbb{F}}{\leftrightarrow} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega + n\Omega_o)$$

con $T = 2\pi/\Omega_o$.

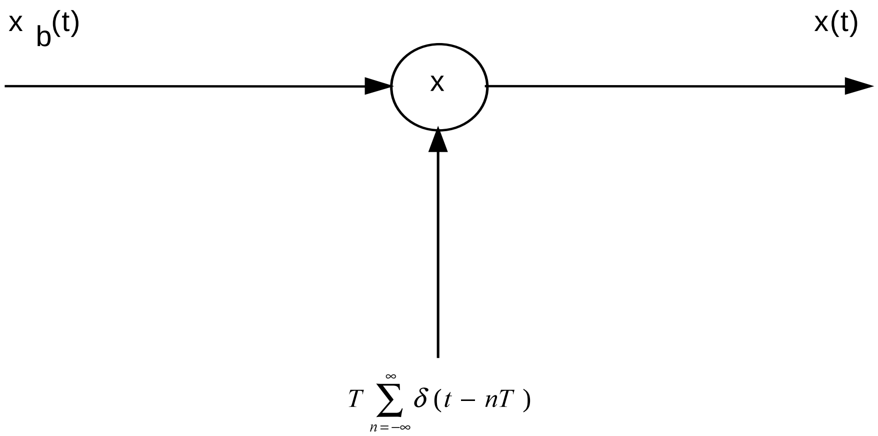
Luego la transformada inversa de una señal periódica en el dominio de la frecuencia viene dada por

$$x(t) = x_b(t) \;\; T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\,(t - nT)$$

ó

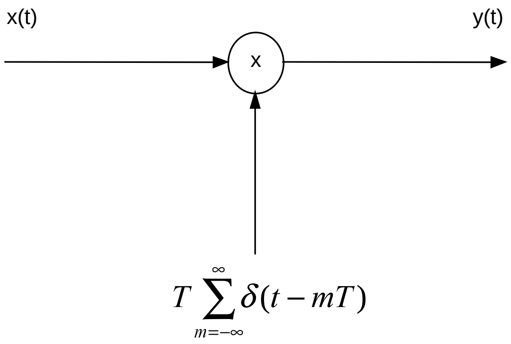
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T\, x_b\,(nT) \;\; \delta(t - nT)$$

Obsérvese que la señal en el tiempo correspondiente a una señal periódica en el dominio de la frecuencia puede obtenerse mediante el sistema.



II.6.1.- MUESTREO DE SEÑALES Y TEOREMA DE NYQUIST

Considérese ahora el sistema anterior con una entrada arbitraria



$$y(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} Tx(mT)\,\delta(t - mT)$$

$$Y(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(\omega + m\Omega_o)$$

Evidentemente la transformada de la salida Y(ω) será periódica con periodo $\Omega_o = 2\pi/T$.

Si X(ω) está limitada en banda

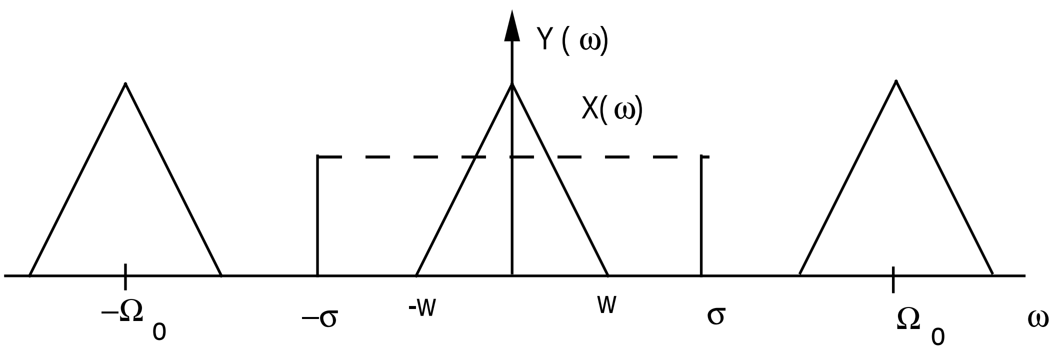
$$X(\omega) = 0 \qquad |\omega| \geq W = 2\pi B$$

y T es tal que

$$\Omega_o \geq 2W$$

o sea $\frac{1}{T} \geq 2B$

La transformada Y(ω) será



En estas condiciones, x(t) puede recuperarse a partir de y(t) mediante un filtro paso bajo ideal (línea de puntos).

$$H(\omega) = \prod\left(\frac{\omega}{2\sigma}\right) \qquad\qquad w \leq \sigma \leq \Omega_o - w$$

$$X(\omega) = Y(\omega)\ H(\omega)$$

En el dominio del tiempo

$$x(t) = y(t) * h(t)$$

$$= \frac{\text{sen}\sigma t}{\pi t} * \sum_{n=-\infty}^{\infty} Tx(nT)\ \delta(t - nT)$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Tx(nT) \frac{\text{sen}\sigma(t-nT)}{\pi(t-nT)}$$

Es decir, una señal x(t) limitada en banda a B Hz puede recuperarse a partir de sus muestras tomadas a intervalos de T segundos si se verifica que la frecuencia de muestreo es mayor que el doble del ancho de banda (Teorema de Nyquist)

$$f_s = \frac{1}{T} \geq 2B$$

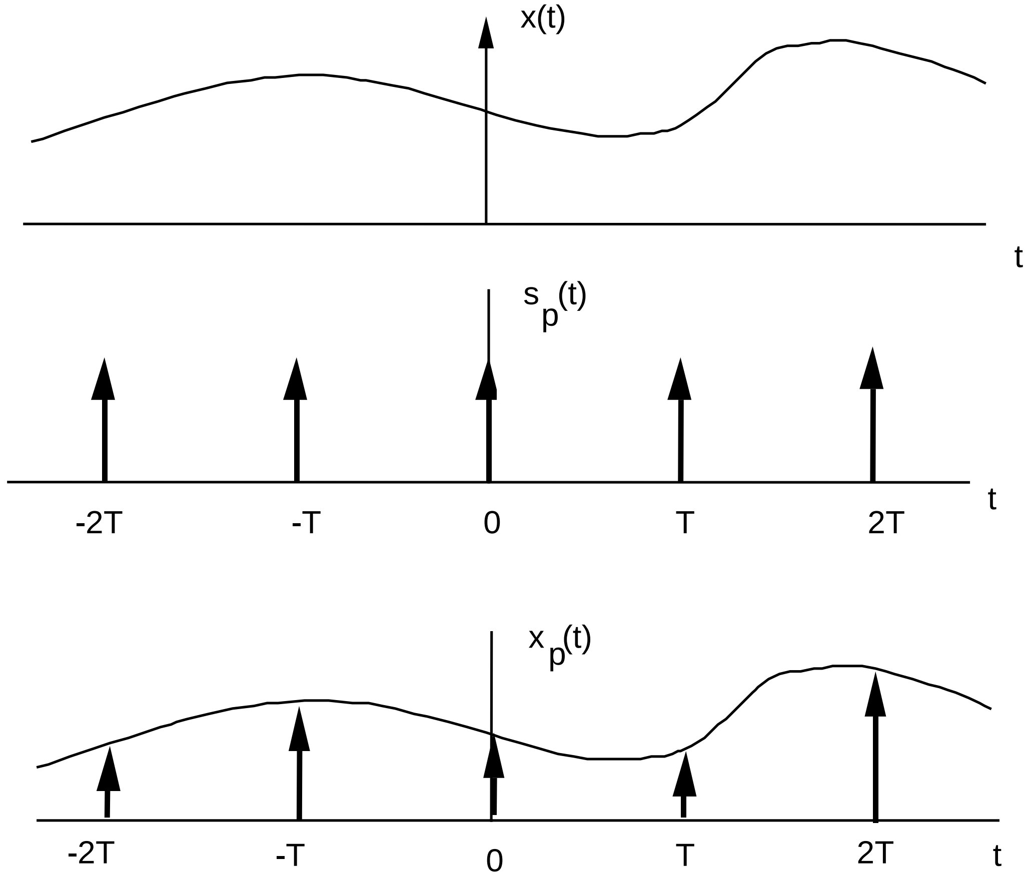
A la señal

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Tx(nT)\ \delta(t-nT) = x_p(t)$$

Se denomina señal muestreada de x(t) y al tren de impulsos

$$s_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T\delta(t-nT)$$

se le denomina muestreador ideal

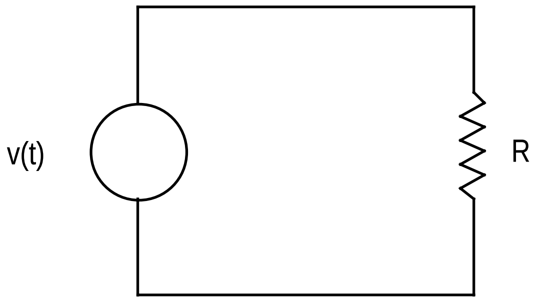


x(t)
t
s
p
(t)
t
-2T
-T
0
T
2T
x
p
(t)
-2T
-T
0
T
2T
t

TEMA III.- CORRELACION Y ESPECTRO

III.1.- ENERGIA DE UNA SEÑAL

Sea el circuito de la figura



La potencia instantánea entregada a la carga (disipada en la resistencia) es

$$P(t) = v(t)\, i(t) = \frac{v^2(t)}{R} = R\, i^2(t)$$

y la energía total entregada por la fuente

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} P(t)\, dt = \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{\infty} v^2(t)dt = R \int_{-\infty}^{\infty} i^2(t)dt$$

Es proporcional (igual si R=1) a la integral del cuadrado de la tensión o intensidad.

Por analogía, definimos la energía de una señal x(t) como :

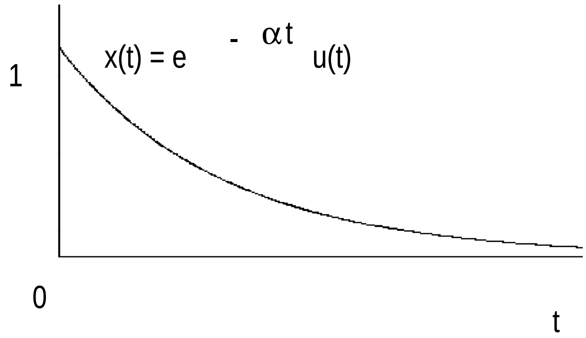
$$E_{xx} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt$$

EXTENSION A SEÑALES COMPLEJAS

Si x(t) es compleja

$$E_{xx} = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t)dt$$

EJEMPLO



$$E_{xx} = \int_{0}^{\infty} e^{-2\alpha t} \, dt = \frac{1}{2\alpha}$$

III.2.- ENERGIA CRUZADA

De forma similar puede definirse la energía cruzada de dos señales

$$E_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \, y^*(t) \, dt$$

En el caso particular de que y(t) = x(t) la energía cruzada se reduce a la energía de la señal x(t). No suele tener una interpretación intuitiva simple salvo en casos como el circuito anterior.

III.3.- FORMULA DE PARSEVAL PARA ENERGIA CRUZADA

$$E_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \, y^*(t) \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \, e^{j\omega t} \, d\omega \right] y^*(t) \, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[X(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} y^*(t) \, e^{j\omega t} \, dt \right] d\omega$$

$$E_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, y^*(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, Y^*(\omega)\, d\omega$$

Obsérvese que

$$E_{xy} = F\,[x(t)\, y^*(t)]\Big|_{\omega=0}$$

$$x(t)\, y^*(t) \quad \overset{\mathbb{F}}{\longleftrightarrow} \quad \frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y^*(-\omega)$$

$$\frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y^*(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega')\, Y^*(\omega' - \omega)\, d\omega'$$

Particularizando para $\omega=0$ queda la expresión anterior.

A la expresión

$$S_{xy}(\omega) = X(\omega)\, Y^*(\omega)$$

Se la conoce como espectro de energía cruzada de las señales x(t) e y(t) y la energía total será

$$E_{xy} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega)\, d\omega$$

III.4.- FORMULA DE PARSEVAL PARA ENERGIA

Identificando y(t) + x(t) del apartado anterior se tiene

$$E_{xx} = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2\, d\omega$$

Puede interpretarse que la energía se distribuye en el espectro según

$$S_{xx}(\omega) = |X(\omega)|^2$$

Razón por la que a $S_{xx}(\omega)$ se le conoce como densidad espectral de energía y la energía total se obtiene como

$$E_{xx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega)\, d\omega$$

EJEMPLO

$$x(t) = e^{-\alpha t}\, u(t)$$

$$X(\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega}$$

$$S_{xx}(\omega) = \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$E_{xx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\alpha^2+\omega^2} = \frac{1}{2\alpha}$$

PROPIEDADES DE LA DENSIDAD ESPECTRAL DE ENERGIA

- Es una función real de ω
- Es siempre positiva
- Si x(t) es real $S_{xx}(\omega)$ será una función par de ω

III.5.- SEÑALES DE POTENCIA MEDIA FINITA

El concepto de energía de una señal, definido previamente, sólo tiene sentido para el conjunto de señales que verifican que

$$E_{xx} = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt < \infty$$

Denominadas señales de energía finita.

Existen muchas señales que no verifican la relación anterior, entre ellas las señales periódicas, el escalón, etc. Para este tipo de señales se requiere definir otro concepto.

III.6.- POTENCIA MEDIA PARA SEÑALES PERIODICAS

Sea x(t) periódica con periodo T_o , la energía por cada periodo será

$$E_{xx}|_{T_o} = \int_{t_o-T_o/2}^{t_o+T_o/2} |x(t)|^2\, dt$$

Y la potencia media por cada periodo será

$$P_{xx}|_{T_o} = \frac{E_{xx}|_{T_o}}{T_o} = \frac{\int_{t_o-T_o/2}^{t_o+T_o/2} |x(t)|^2\, dt}{T_o}$$

La potencia media en M.periodos será ($T = MT_o$)

$$P_{xx}|_{T = MT_o} = \frac{\int_{t_o-T/2}^{t_o+T/2} |x(t)|^2\, dt}{T} = \frac{1}{T_o} \int_{t_o-T_o/2}^{t_o+T_o/2} |x(t)|^2\, dt$$

Si el número de periodos tiende a infinito, la potencia media también será la misma.

$$P_{xx} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_o} \int_{T_o} |x(t)|^2\, dt$$

Este concepto es útil y puede extenderse a señales no periódicas cuya energía es infinita. Así para cualquier señal se define

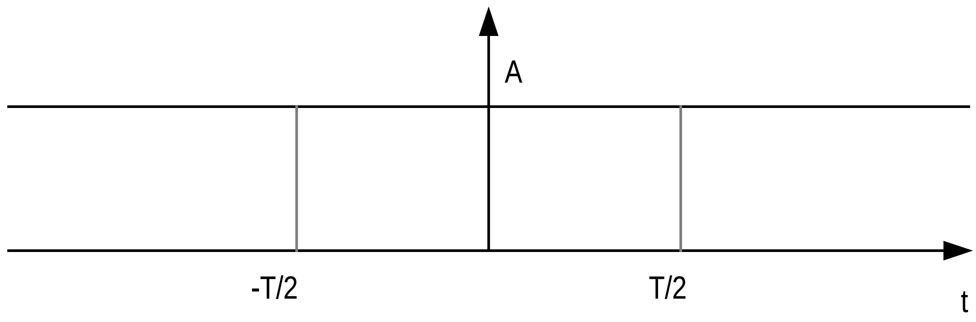
Potencia Media

$$P_{xx} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2\, dt$$

Es evidente que para señales de energía finita esta potencia media es cero.

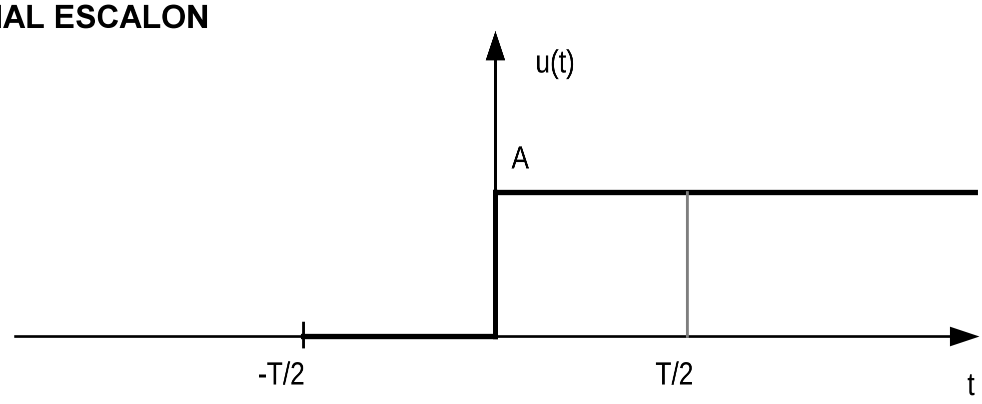
EJEMPLOS

Señal continua



$$P_{xx} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} (A^2T) = A^2$$

SEÑAL ESCALON



$$P_{xx} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} (T/2) = \frac{1}{2}$$

III.7.- TIPOS DE SEÑALES

Según las definiciones anteriores, las señales pueden clasificarse en :

- Señales de energía finita $0 < E_{xx} < \infty$
- Señales de potencia media finita $0 < P_{xx} < \infty$

Ambos tipos de señales son mútuamente excluyentes. Una señal de energía finita tiene potencia media nula y una de potencia media finita tiene energia finita.

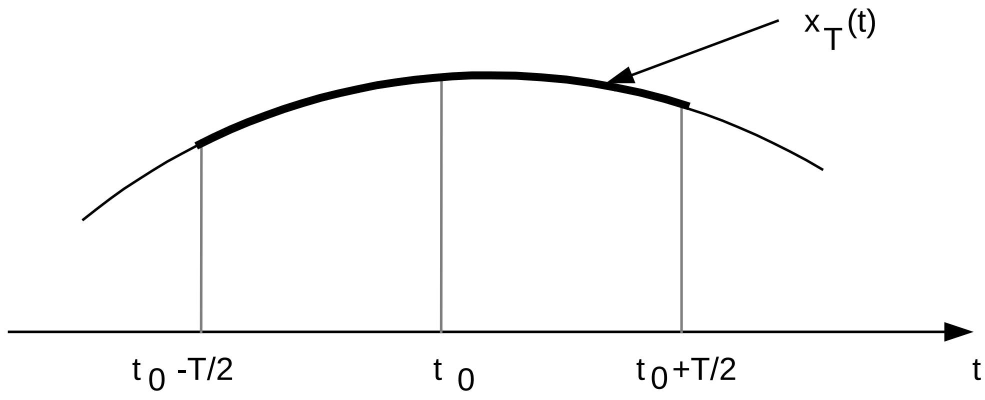
Todas las señales acotadas de duración finita son de energía finita. Las señales periódicas son de potencia media finita y algunas no periódicas. La caracterización de estas últimas no siempre es fácil.

III.8.- ESPECTRO DE POTENCIA DE SEÑALES DE POTENCIA MEDIA FINITA

Para calcular el espectro de potencia de estas señales nos ayudaremos de la función intermedia

$$P_{xx}^{T} = \frac{\text{ENERGIA EN T}}{T}$$

Sea $x_T(t) = x(t) \prod\left(\frac{t-t_0}{T}\right)$



$$P_{xx}^{T} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |x_T(t)|^2\, dt}{T} = \frac{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X_T(\omega)|^2 d\omega}{T}$$

Para $T \to \infty$

$$P_{xx} = \lim_{T\to\infty} P_{xx}^{T} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{|X_T(\omega)|^2}{T} \, d\omega$$

A la función

$$S_{xx}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{|X_T(\omega)|^2}{T}$$

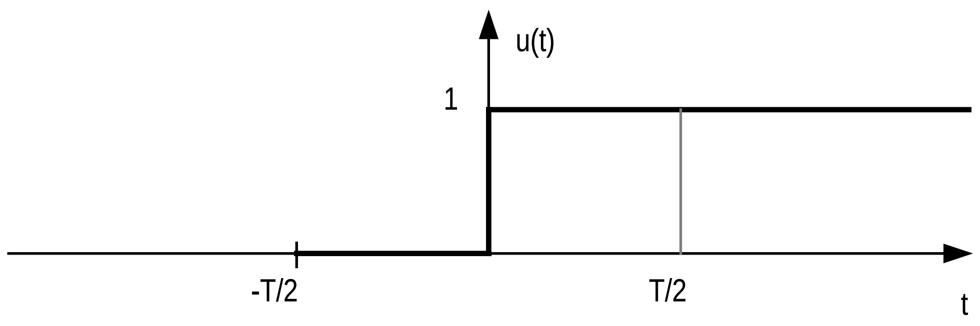
Se le puede denominar densidad espectral de potencia y la potencia total

$$P_{xx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) \, d\omega$$

EJEMPLOS

Función escalón

$$X_T(\omega) = e^{-j\omega T/4} \frac{2\operatorname{sen}\omega T/4}{\omega}$$



$$S_{xx}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{|X_T(\omega)|^2}{T} = \lim_{T\to\infty} \frac{4\operatorname{sen}^2\omega T/4}{\omega^2 T}$$

Este límite es cero para $\omega \neq 0$, no estando definido para $\omega = 0$. Veamos su integral.

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega)\, d\omega = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |x_T(\omega)|^2\, d\omega$$

$$= 2\pi \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |x_T(t))^2\, dt = 2\pi \lim_{T\to\infty} \frac{T/2}{T} = \pi$$

Luego

$$S_{XX}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{|x_T(\omega)|^2}{T} = \pi\delta(\omega)$$

Obsérvese que

$$S_{XX}(\omega) = \pi\delta(\omega) \neq |\mathcal{F}[u(t)]|^2$$

$$\mathcal{F}[u(t)] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

También $\quad P_{XX}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega)\, d\omega = \frac{1}{2}$

III.8.1.- SEÑALES PERIODICAS

Haciendo $\quad T = (2M+1)T_o$

$$x_T(t) = \sum_{n=-M}^{M} x_b(t-nT_o) \qquad \text{con } x_b(t) = 0 \text{ , } |t| > T_o/2$$

Su transformada de Fourier es :

$$X_T(\omega) = X_b(\omega) \sum_{n=-M}^{M} e^{-jn\omega T_o}$$

Sumando la serie geométrica se obtiene

$$X_T(\omega) = X_b(\omega)\,\frac{\operatorname{sen}(2M+1)\omega T_o/2}{\operatorname{sen}\omega T_o/2}$$

El espectro final de la señal periódica será :

$$S_{xx}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} |X_T(\omega)|^2$$

$$= \frac{|X_b(\omega)|^2}{T_o} \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1} \frac{\operatorname{sen}^2(2M+1)\omega T_o/2}{\operatorname{sen}^2\omega T_o/2}$$

Procediendo de forma análoga a la del epígrafe II.2 relativo a la transformada de Fourier de señales periódicas se obtiene finalmente :

$$S_{xx}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \; 2\pi\, \delta(\omega - n\omega_o)$$

siendo c_n el coeficiente n-ésimo del desarrollo en serie de Fourier de x(t).

$$c_n = \frac{X_b(n\omega_o)}{T_o}$$

Este es el denominado espectro de "líneas" o "rayas". La raya espectral n-ésima tiene asociada la potencia $|c_n|^2$.

III.9.- FORMULA DE PARSEVAL PARA SEÑALES PERIODICAS

Sean x(t) e y(t) dos señales periódicas con el mismo periodo T_o . La potencia media cruzada será

$$P_{xy} = \frac{1}{T_o} \int_{t_o-T_o/2}^{t_o+T_o/2} x(t)\, y^*(t)\, dt$$

Por ser x(t) periódica

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, e^{jn\omega_o T} \qquad\qquad \omega_o = \frac{2\pi}{T_o}$$

Sustituyendo

$$P_{xy} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{1}{T_o} \int_{t_o-T_o/2}^{t_o+T_o/2} y^*(t)\, e^{jn\omega_o t}\, dt$$

Por ser y(t) también periódica

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \; e^{jn\omega_o t} \; dt$$

Se concluye que

$$P_{xy} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \; b_n{}^*$$

Si ambas señales son iguales y(t) + x(t)

$$P_{xx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2$$

INTERPRETACION

La potencia media de una señal periódica es igual a la suma de las amplitudes al cuadrado de las componentes armónicas de la señal x(t). A la raya espectral n-ésima se le puede asignar la potencia $|a_n|^2$.

III.10.- MEDIDA DE PARECIDO O DISTANCIA

Dadas dos señales reales x(t) e y(t) ¿cómo puede medirse el parecido entre ambas?

La forma más intuitiva es medir la diferencia cuadrática integrada en el intervalo de existencia de ambas señales. Esta distancia es

$$d(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - y(t-\tau)]^2 \; dt = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t+\tau) - y(t)]^2 \; dt$$

La señal y(t) está desplazada τ.

Desarrollando el cuadrado

$$[x(t+\tau) - y(t)]^2 = x^2(t+\tau) + y^2(t) - 2y(t)x(t+\tau)$$

Sustituyendo en la integral se obtiene

$$d(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t+\tau)\, dt + \int_{-\infty}^{\infty} y^2(t)\, dt - 2\int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)\, y(\tau)\, dt$$

$$d(\tau) = E_{xx} + E_{yy} - 2R_{xy}(\tau)$$

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)\, y(t)\, dt$$

El valor de la distancia depende de la función $R_{xy}(\tau)$. Cuanto más grande es ésta, más pequeña será la distancia y viceversa.

Puesto que $d(\tau) \geq 0$ $\quad R_{xy}(\tau) \leq (E_{xx} + E_{yy})/2$

Utilizando la desigualdad de Schwarz.

$$\left| \int_a^b u(t)\, v(t)\, dt \right|^2 \leq \int_a^b |u(t)|^2\, dt \int_a^b |v(t)|^2\, dt$$

con $u(t) + x(t+\tau)$ y $v(t) + y(t)$ se tiene que

$$|R_{xy}(\tau)|^2 \leq E_{xx}\, E_{yy}$$

El signo igual se cumple cuando u(t) y v(t) son proporcionales, y daría la distancia mínima/máxima dependiendo del signo de $R_{xy}(\tau)$.

$$d(\tau)|_{max,min} = \left(E_{xx}^{1/2} \pm E_{yy}^{1/2} \right)^2$$

III.11.- CORRELACION CRUZADA Y ESPECTRO CRUZADO

Generalizando a señales complejas, a la expresión

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)\, y^*(t)dt \qquad R_{xy}(\tau) = R_{yx}^*(-\tau)$$

se le denomina correlación cruzada. Su transformada de Fourier será

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)\, y^*(t)\, dt \right] e^{-j\omega\tau}\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y^*(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau \right] dt =$$

$$= X(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} y^*(t) e^{j\omega t}\, dt$$

Es decir el espectro cruzado de energía

$$S_{xy}(\omega) = X(\omega)\, Y^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau$$

Nótese que $R_{xy}(0) = E_{xy}$ energía cruzada

Obsérvese que también

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, y^*(t-\tau)\, dt = x(t) * y^*(-\tau)$$

$$\mathcal{F}[R_{xy}(\tau)] = X(\omega).\mathcal{F}[y^*(-\tau)] = X(\omega)\, Y^*(\omega)$$

III.12.- FUNCION DE AUTOCORRELACION

Si y(t) + x(t), la función correlación cruzada se convierte en la función de autocorrelación

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)\, x^*(t)\, dt$$

su transformada de Fourier será

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau = S_{xx}(\omega) = |X(\omega)|^2$$

es decir el espectro de energía de la señal x(t).

Nótese que

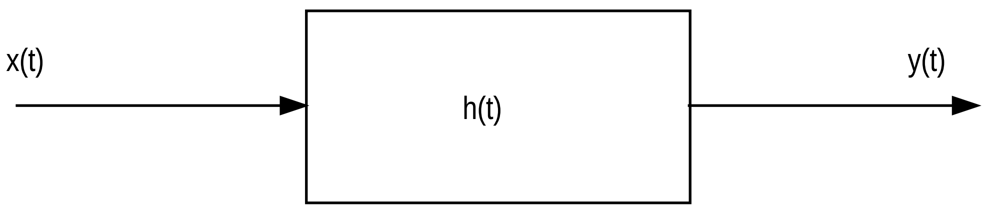
$$R_{xx}(0) = E_{xx} \qquad \text{Energía de la señal}$$

de la desigualdad de Schwarz, aplicada anteriormente, se deduce que

$$|R_{xx}(\tau)|^2 \leq E_{xx}\, E_{xx} = R_{xx}^2(0)$$

$$|R_{xx}(\tau)| \leq R_{xx}(0)$$

III.13 CORRELACION Y ESPECTRO DE SEÑALES DE ENERGIA FINITA A TRAVES DE SISTEMAS LINEALES



La correlación cruzada entrada-salida viene dada por

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau) y^*(t) dt = x(\tau) * y^*(-\tau)$$

$$y^*(-\tau) = x^*(-\tau) * h^*(-\tau)$$

Luego

$$R_{xy}(\tau) = x(\tau) * x^*(-\tau) * h^*(-\tau)$$

$$R_{xy}(\tau) = h^*(-\tau) * R_{xx}(\tau)$$

Análogamente la correlación salida-entrada

$$R_{yx}(\tau) = y(\tau) * x^*(-\tau) = h(\tau) * x(\tau) * x^*(-\tau)$$

$$R_{yx}(\tau) = h(\tau) * R_{xx}(\tau)$$

De igual modo la autocorrelación de la salida

$$R_{yy}(\tau) = y(\tau) * y^*(-\tau) = x(\tau) * h(\tau) * x^*(-\tau) * h^*(-\tau)$$

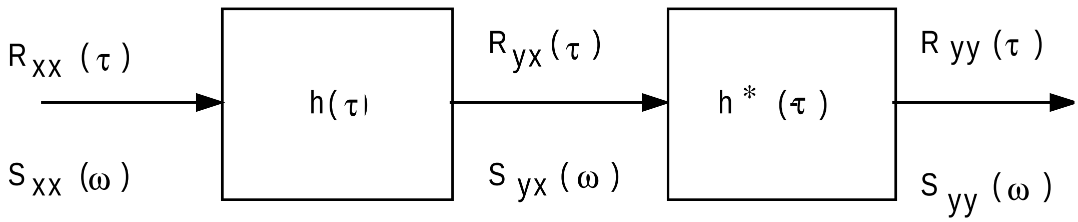
$$R_{yy}(\tau) = h(\tau) * h^*(-\tau) * R_{xx}(\tau)$$

Tomando transformadas de Fourier en las tres expresiones anteriores se obtiene

$$S_{xy}(\omega) = H^*(\omega)\, S_{xx}(\omega)$$

$$S_{yx}(\omega) = H(\omega)\, S_{xx}(\omega)$$

$$S_{yy}(\omega) = |H(\omega)|^2\, S_{xx}(\omega)$$



III.14.- CORRELACION CRUZADA DE SEÑALES DE POTENCIA MEDIA FINITA

Como en señales de energía finita podemos definir

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_T x(t+\tau)\, y^*(t)\, dt)$$

Puede comprobarse que su transformada de Fourier es el espectro de potencia cruzada

$$S_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau$$

III.15.- FUNCION DE AUTOCORRELACION DE SEÑALES DE POTENCIA MEDIA FINITA

Si ambas señales son iguales se tiene la función de autocorrelación

$$R_{xx}(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{T} x(t+\tau)\, x^*(t)dt$$

y su transformada de Fourier será el espectro de potencia de la señal

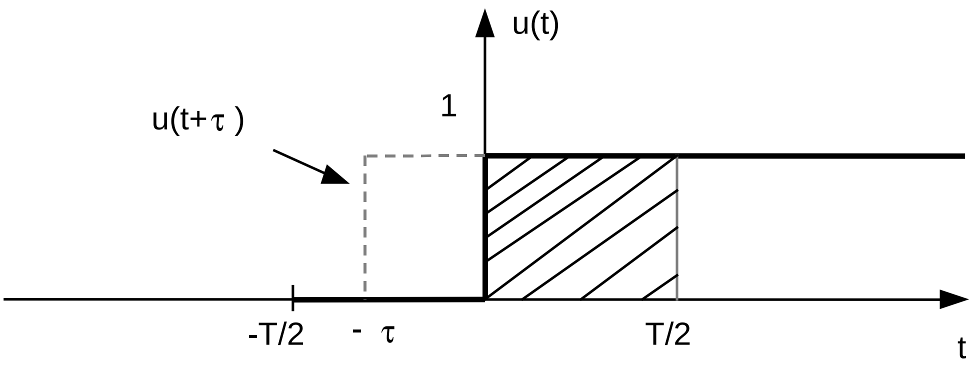
$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau$$

Nótese que la función de autocorrelación tiene las mismas propiedades que su homónima de energía finita

$$R_{xx}(0) = P_{xx}$$
$$R_{xx}(\tau) \le R_{xx}(0)$$

EJEMPLOS :

AUTOCORRELACION DE LA FUNCION ESCALON



$$R_{uu}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t+\tau)\, u^*(t)\, dt)$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\, (T/2) = \frac{1}{2}$$

$$R_{uu}(\tau) = \frac{1}{2}$$

$$S_{uu}(\omega) = \mathrm{F}\left[\frac{1}{2}\right] = \pi\delta(\omega)$$

$$P_{uu} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{uu}(\omega)\, d\omega = \frac{1}{2}$$

III.16.- CORRELACION CRUZADA DE SINUSOIDES

Sea $x(t) = e^{j\omega_1 t}$; $y(t) = e^{j\omega_2 t}$

la correlación cruzada será

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j\omega_1(t+\tau)}\; e^{-j\omega_2 t}\, dt$$

$$= e^{j\omega_1\tau} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j(\omega_1-\omega_2)t}\, dt$$

$$= e^{j\omega_1\tau} \lim_{T\to\infty} \frac{2\mathrm{sen}(\omega_2-\omega_1)T/2}{T(\omega_2-\omega_1)}$$

$$R_{xy}(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega_1 \neq \omega_2 \\ e^{j\omega_1\tau} & \text{si } \omega_1 = \omega_2 \end{cases}$$

CONCLUSION

El parecido entre dos sinusoides de distinta frecuencia es nulo.

III.17.- CORRELACION DE SEÑALES PERIODICAS

Sea x(t) periódica de periodo T_{ox} e y(t) de periodo T_{oy} .

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{nx} \; e^{jn\omega_{ox}t} \qquad \omega_{ox} = \frac{2\pi}{T_{ox}}$$

$$y(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{my} \; e^{jm\omega_{oy}t} \qquad \omega_{oy} = \frac{2\pi}{T_{oy}}$$

Por el resultado anterior

$$R_{xy}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{nx} \; c^*_{my} \, e^{jn\omega_{ox}\tau} \lim_{T\to\infty} \frac{2\text{sen}(m\omega_{oy}-n\omega_{ox})T/2}{T(m\omega_{oy}-n\omega_{ox})}$$

El límite será distinto de cero para aquellas parejas de valores n y m tales que

$$m\omega_{oy} = n\omega_{ox}$$

Evidentemente $\omega_{oy} /\omega_{ox} = T_{ox} /T_{oy}$ debe ser racional. En caso contrario $R_{xy}(\tau) = c_{ox} \; c^*_{oy}$

Sea (m_o , n_o) la pareja de número más pequeña para la que se cumple

$$m_o \, \omega_{oy} = n_o \, \omega_{ox} = \omega_o$$

ω_o será por tanto el mínimo común múltiplo de (ω_{ox} ,ω_{oy}). La correlación cruzada será una función periódica de periodo $T_o = 2\pi/\omega_o$

$$R_{xy}(\tau) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{(ln_o)x}\ c^*_{(lm_o)y}\ e^{jl\omega_o}$$

Si ambas señales tienen el mismo periodo $n_o = m_o = 1$ y la correlación cruzada será

$$R_{xy}(\tau) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{lx}\ c^*_{ly}\ e^{jl\omega_o\tau}$$

Finalmente si ambas señales son iguales $[y(t) = x(t)]$ se obtiene la función de autocorrelación de una señal periodica

$$R_{xx}(\tau) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} |c_{lx}|^2\ e^{jl\omega_o\tau} \quad ; \quad R_{xx}(0) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} |c_{lx}|^2 = P_{xx}$$

La correlacion, también periódica,admite un desarrollo de Fourier

III.18.- ESPECTRO CRUZADO DE SEÑALES PERIODICAS

Tomando la transformada de Fourier de la correlación cruzada

$$S_{xy}(\omega) = F[R_{xy}(\tau)] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{(ln_o)x}\ c^*_{(lm_o)y}\ \ 2\pi\delta\,(\omega - l\omega_o)$$

se obtiene el espectro cruzado de potencia.

III.19.- AUTOESPECTRO DE SEÑALES PERIODICAS

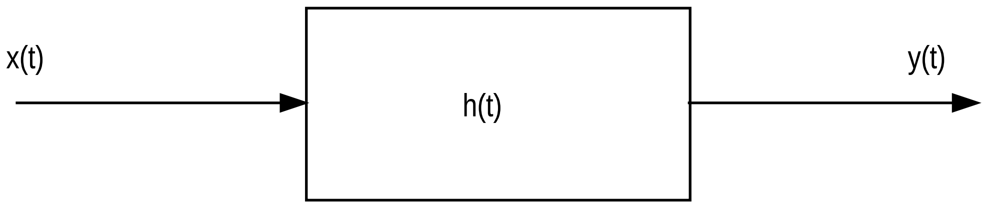
La transformada de Fourier de la función de autocorrelación de una señal periódica

$$S_{xx}(\omega) = F[R_{xx}(\tau)] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} |c_l|^2\ \ 2\pi\delta(\omega - l\omega_o)$$

Es el autoespectro o simplemente el espectro de potencia encontrado anteriormente.

III.20.- CORRELACION Y ESPECTRO DE SEÑALES DE POTENCIA MEDIA FINITA A TRAVES DE SISTEMAS LINEALES

Sea x(t) una señal de potencia media finita



La correlación cruzada salida-entrada es por definición

$$R_{yx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_T y(t+\tau)x^*(t)dt$$

Sustituyendo y(t+τ) en función de x(t) y h(t)

$$R_{yx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_T x^*(t) \left[\int_{\infty}^{-\infty} h(\alpha)\, x(t+\tau-\alpha)d\alpha \right] dt$$

Intercambiando las integrales y el límite

$$R_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) \left[\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_T x(t+\tau-\alpha)x^*(t)dt \right] d\alpha$$

Es decir

$$R_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)\; R_{xx}(\tau-\alpha)\, d\alpha = h(\tau) * R_{xx}(\tau)$$

Análogamente, la autocorrelación de la salida

$$R_{yy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_T y(t+\tau)y^*(t)dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_T y(t+\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty} h^*(\alpha)x^*(t-\alpha)d\alpha\right]dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h^*(\alpha)\left[\lim \frac{1}{T} \int_T y(t+\tau)\, x^*(t-\alpha)d\tau\right]d\alpha$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h^*(\alpha)\, R_{yx}(\tau+\alpha)\; d\alpha$$

Luego

$$R_{yy}(\tau) = R_{yx}(\tau) * h^*(-\tau) = R_{xx}(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau)$$

Expresiones totalmente idénticas a las de las señales de energía finita